

1 Généralités sur les fonctions

Exercice 1 ★ Ensembles de définition –

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \sqrt{2x^2 - 12x + 18} & 2. \ln(x^2 + 4x + 4) \\ 3. \sqrt{\frac{8-16x}{(7+x)^2}} & 4. \ln(3-x) + \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}. \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2274]

Exercice 2 ★ Opérations sur la parité –

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions impaires. Que dire de la parité de $f + g$, $f \times g$ et $f \circ g$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2273]

Exercice 3 ★ Parité et fonction exponentielle –

Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^x - e^{-x}, f_2(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, f_3(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2340]

2 Fonctions logarithme, exponentielle, puissance

Exercice 4 ★ Équations –

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. e^{2x} - e^x - 6 = 0 & 2. 3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0. \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2336]

Exercice 5 ★ Systèmes –

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases} & 2. \begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases} \\ 3. \begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases} & \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2345]

Exercice 6 ★ Un encadrement de e –

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3173]

Exercice 7 ★ Limites et exponentielle –

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3179]

Exercice 8 ★★ Positivité –

Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Démontrer que $g \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[361]

Exercice 9 ★ Les principales formes indéterminées –

Déterminer les limites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\exp(x) - x^3)$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - x - \sqrt{x})$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}$ | |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3182]

Exercice 10 ★★ Limites et croissances comparées –

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. $\ln(x) - e^x$ | 2. $\frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$ |
| 3. $\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$ | 4. $\frac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1}$ |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[661]

Exercice 11 ★★★ Le médecin légiste –

Un inspecteur qui arrive sur le lieu d'un crime demande au médecin légiste de prendre la température de la victime. Elle est de 32°C . Il prend la température de la pièce, qui est de 20°C . La loi de Newton sur le refroidissement d'un objet en milieu ambiant permet de modéliser la température de la victime en posant $T(t) = Ae^{-ct} + 20$ où $t > 0$ représente le temps, exprimé en heures, depuis la mort de la victime et $T(t)$ la température de la victime à l'instant t , en degrés Celsius. Sachant qu'une demi-heure plus tard, la température de la victime est de 31°C , déterminer l'heure du crime (on prendra comme hypothèse qu'au moment de sa mort, la température de la victime était de 37°C).

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2343]

Exercice 12 ★★ Pharmacocinétique –

On injecte un médicament à un patient en intraveineuse. Dans de nombreux cas, la concentration dans le sang de la substance active, en mg.L^{-1} , vérifie la relation

$$C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$$

où C_0 est la concentration initiale, t est le temps, exprimé en heures, après l'injection, et λ est un coefficient spécifique au médicament,

1. On appelle demi-vie du médicament le temps nécessaire pour que, après administration du médicament, sa concentration diminue de moitié. Calculer (en fonction de λ) le temps de demi-vie $T_{1/2}$ d'un médicament

dont la concentration dans le sang satisfait la relation précédente. Quelle est la concentration après $2T_{1/2}$? Après $nT_{1/2}$?

2. L'aztréonam est un antibiotique qui est notamment utilisé chez les patients atteints de mucoviscidose pour soigner des infections bronchiques. Il n'est efficace que si sa concentration dans le sang dépasse 49mg.L^{-1} . On dispose de doses de 2g et on souhaite connaître le temps maximal entre deux injections pour maintenir cette concentration supérieure à 49mg.L^{-1} chez un patient pesant 60kg. Sachant que le volume sanguin d'un adulte est d'environ 70mL.kg^{-1} et que le temps de demi-vie de l'aztréonam, tel qu'indiqué par le fabricant, est de 1,7h, calculer

le temps maximal séparant la première injection et la deuxième ; le temps maximal séparant les injections suivantes

3. le temps maximal séparant la première injection et la deuxième ;

4. le temps maximal séparant les injections suivantes

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3049]

Exercice 13 ★★★★★ Point le plus proche de l'origine –

On considère la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = x + e^{2x}$. Démontrer qu'il existe un réel c tel que $g(x) < 0$ si $x < c$ et $g(x) > 0$ si $x > c$.

2. En déduire qu'il y a un unique point sur la courbe de la fonction exponentielle qui minimise la distance à l'origine. On le note M_0 .

3. Démontrer que la tangente à la courbe en M_0 est perpendiculaire à la droite (OM_0) .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2342]

Exercice 14 ★ Tableau de valeurs du logarithme décimal –

Sans utiliser de calculatrice, compléter le tableau suivant de valeurs approchées du logarithme décimal

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	16	50	500	$\sqrt{27}$
$\log x$		0,301	0,477				0,845						

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3175]

Exercice 15 ★ Équations –

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$

2. $\ln(x + 2) - \ln(x + 1) = \ln(x - 1)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[356]

Exercice 16 ★ Nombre de chiffres en base 10 –

Quel est le nombre de chiffres en base 10 du nombre $2^{43112609}$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2334]

Exercice 17 ★ Tangente à la courbe représentative du logarithme –

Existe-t-il un point de la courbe représentative du logarithme tel que la tangente à cette courbe représentative en ce point passe par l'origine ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2335]

Exercice 18 ★ Inégalités –

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[583]

Exercice 19 ★ Inéquations avec des logarithmes –

Résoudre les inéquations suivantes (on précisera le domaine de définition) :

1. $(2x - 7) \ln(x + 1) > 0$
2. $\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq 0$
3. $(\ln(x) + 1)(\ln(x) - 2) > 0$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2338]

Exercice 20 ★★ Système d'équations –

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

1.
$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \ln(x) + \ln(y) = 3 \ln 6 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(91) \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2337]

Exercice 21 ★ Limites et logarithmes –

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + x \ln x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + x \ln x}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3178]

Exercice 22 ★ Combien de solutions? –

Déterminer le nombre de solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation $x \ln(x) = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3174]

Exercice 23 ★★★ Une inégalité sur les entiers –

Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2344]

Exercice 24 ★★ Le logarithme n'est pas une fraction rationnelle –

1. Soit f un polynôme de degré n , $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Démontrer que $x^{-n} f(x)$ admet une limite non-nulle en $+\infty$.

2. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tels que, pour tout $x > 0$,

$$\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On note $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. Démontrer que $x^{q-p} \ln(x)$ admet une limite non-nulle en $+\infty$.

3. En déduire que l'hypothèse faite à la question précédente est fausse.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[363]

Exercice 25 ★★ Irrationalité du logarithme décimal de 2 –

Démontrer que $\log_{10} 2$ est irrationnel.

Exercice 26 ★ Surpuissante! –

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto x^x$. Étudier les variations de cette fonction et ses limites aux bornes.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre de solutions de l'équation $y = x^x$, d'inconnue $x > 0$?

Indication ▼ Correction ▼

[3176]

Exercice 27 ★★ Équation –

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Indication ▼ Correction ▼

[357]

3 Fonctions hyperboliques**Exercice 28** ★ Formules de trigonométrie hyperbolique –

Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y)$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y).$$

Indication ▼ Correction ▼

[3172]

Exercice 29 ★ Inégalités et fonctions hyperboliques –

Démontrer les inégalités suivantes, valables pour tout $x \geq 0$:

$$\operatorname{sh}(x) \geq x, \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼

[3177]

Exercice 30 ★★ Somme de cosinus hyperboliques –

Montrer que, pour tout $x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \cosh(kx) = \frac{\cosh(nx/2) \sinh((n+1)x/2)}{\sinh(x/2)}.$$

Indication ▼ Correction ▼

[366]

Exercice 31 ★★ Équation –

Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

Indication ▼ Correction ▼

[367]

Exercice 32 ★★ Étude de fonctions –

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \sinh(1/x)$.

1. Étudier la parité de f .

2. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$, en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer sa dérivée.

4. Justifier que pour tout $y \geq 0$, $\tanh(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f , puis tracer la courbe représentative de f .

4 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 33 ★ Valeurs particulières –

Déterminer la valeur de $\arcsin(-1/2)$, $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ et $\arctan(\sqrt{3})$.

Indication ▼ Correction ▼

[2290]

Exercice 34 ★ Valeur exacte –

Calculer

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\sin\frac{17\pi}{5}\right).$$

Indication ▼ Correction ▼

[370]

Exercice 35 ★ Recherche de primitive –

Soit $a \neq 0$ un réel.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \arctan(ax)$.
2. En déduire une primitive de $\frac{1}{4+x^2}$.

Indication ▼ Correction ▼

[2927]

Exercice 36 ★★ Des graphes –

Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $\arctan(\tan x)$
2. $\arccos(\cos x)$
3. $\arcsin(\sin x)$.

Indication ▼ Correction ▼

[3180]

Exercice 37 ★★ Simplifier ! –

Simplifier les expressions suivantes :

$$\tan(\arcsin x), \quad \sin(\arccos x), \quad \cos(\arctan x).$$

Indication ▼ Correction ▼

[371]

Exercice 38 ★★ Simplifier ! –

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f .

Indication ▼ Correction ▼

[372]

Exercice 39 ★★ Presque du cours –

Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Indication ▼ Correction ▼

[374]

Exercice 40 ★★★ Étude d'une fonction –

Soit f la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2291]

Exercice 41 ★★ Étude de fonctions –

1. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\sqrt{1-x^2} \leq x$?
2. Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2} \exp(\arcsin(x))$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[375]

Exercice 42 ★★ Équations –

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\arccos(x) = \frac{\pi}{6}$
2. $\arctan(x/2) = \pi$
3. $\arcsin(x) = \arccos(x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2289]

Exercice 43 ★★★ Équations –

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$
2. $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$;
3. $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$;
4. $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$;
5. $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[377]

Exercice 44 ★★★ Calcul d'une somme –

Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[378]

Exercice 45 ★★★ Suite –

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\arctan(p+1) - \arctan p = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.
2. Déterminer la limite de $S_n = \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[379]

Exercice 46 ★★★ Sommes remarquables –

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x + 2 \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. Calculer, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 1/x$,

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \arctan x - \arctan y.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[380]

Indication pour l'exercice 1 ▲

\sqrt{y} est défini si et seulement si $y \geq 0$. $\ln y$ est défini si et seulement si $y > 0$

Indication pour l'exercice 2 ▲

Revenir à la définition en calculant par exemple $(f \times g)(-x)$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Utiliser la définition.

Indication pour l'exercice 4 ▲

On pourra poser $X = e^x$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Utiliser le logarithme, puis résoudre le système.
 2. Résoudre le système pour trouver e^x et e^y , puis utiliser le logarithme.
 3. Poser $a = e^x$ et $b = e^y$.
-

Indication pour l'exercice 6 ▲

Écrire la puissance comme l'exponentielle du logarithme, et utiliser l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Factoriser par e^x pour la première limite. La deuxième ne conduit pas à une forme indéterminée.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Calculer la dérivée seconde de g .

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Factoriser par le terme dominant.
 2. Factoriser par le terme dominant.
 3. Factoriser au numérateur et au dénominateur par le terme dominant.
 4. Factoriser au numérateur et au dénominateur par le terme dominant.
 5. Utiliser un changement de variables.
 6. Utiliser un changement de variables.
 7. Utiliser la quantité conjuguée.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Mettre en facteur le terme dominant.
 2. Poser $u = \sqrt{x}$.
 3. Mettre en facteur le terme dominant dans le logarithme.
 4. Mettre en facteur les termes dominants au numérateur et au dénominateur.
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

Poser t_0 le temps (en heures) entre la mort et l'arrivée du médecin légiste. Que sait-on sur $T(t_0)$ et $T(t_0 + 1/2)$. On pourra aussi supposer qu'à l'instant $t = 0$, la température du corps était de 37°C .

Indication pour l'exercice 12 ▲

- 1.
-

2. Lorsqu'on réalise la deuxième injection, on ne repart plus de zéro !
 - 3.
 4. Lorsqu'on réalise la deuxième injection, on ne repart plus de zéro !
-

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Étudier les variations de g .
 2. Soit (x, e^x) un point de la courbe. Quelle est sa distance à l'origine au carré ?
 3. Montrer l'orthogonalité des vecteurs directeurs.
-

Indication pour l'exercice 14 ▲

Utiliser dans tous les sens les propriétés algébriques du logarithme !

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Utiliser les propriétés de la fonction logarithme. Attention aux valeurs de x possibles pour que cette expression ait un sens.
 2. Procéder comme à la première question.
-

Indication pour l'exercice 16 ▲

Si n est le nombre de chiffres du nombre x donné par l'énoncé, lier x et 10^n .

Indication pour l'exercice 17 ▲

Considérer un point $(a, \ln(a))$ sur la courbe et écrire l'équation de la tangente à la courbe en $(a, \ln(a))$. Vérifier si cette droite passe ou non par l'origine.

Indication pour l'exercice 18 ▲

Introduire deux fonctions à étudier !

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Faire un tableau de signes.
 2. Commencer par rechercher l'ensemble de définition de la quantité de gauche. Puis, en remarquant que $\ln(1) = 0$, utiliser la croissance du logarithme pour se ramener à une équation sans logarithme.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

Utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour se ramener à un système sans logarithme ni exponentielle. Résoudre ce système. Pour le premier, on pourra penser aux liens entre les coefficients et les racines d'un polynôme du second degré. Pour le second, on pourra calculer $(x+y)^2$ et $(x-y)^2$.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Indication pour l'exercice 22 ▲

Étudier la fonction $f(x) = x \ln(x)$.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Prendre le logarithme de cette inégalité.

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Factoriser par x^n .
 - 2.
 3. Comparer avec les résultats sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ln x$, α réel.
-

Indication pour l'exercice 25 ▲

Procéder par l'absurde.

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Revenir à la définition de x^x
2. Utiliser le tableau de variations réalisé à la question précédente, puis utiliser le théorème de la bijection.

Il faut être méthodique....

Indication pour l'exercice 27 ▲

Écrire sous forme exponentielle et utiliser l'injectivité de la fonction exponentielle.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Développer le membre de droite en utilisant la définition des fonctions sh et ch.

Indication pour l'exercice 29 ▲

Introduire la fonction différence....

Indication pour l'exercice 30 ▲

Utiliser la forme exponentielle et la somme d'une série géométrique.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Se ramener à une équation du second degré.

Indication pour l'exercice 32 ▲

- 1.
 2. Pour la limite en $+\infty$, poser $y = 1/x$ et se ramener à une limite connue. Pour la limite en 0, utiliser des croissances comparées.
 - 3.
 4. Etudier la fonction auxiliaire $g(y) = \tanh(y) - y$.
-

Indication pour l'exercice 33 ▲

Il faut trouver $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin(x) = -1/2$.

Indication pour l'exercice 34 ▲

L'erreur à ne pas faire est de croire que $\arccos \cos x = x$. Ceci n'est vrai que si $x \in [0, \pi]$. Il faut donc se ramener, par périodicité et parité du cosinus, à se ramener à l'intervalle $[0, \pi]$.

Indication pour l'exercice 35 ▲

1. Dérivée d'une fonction du type $g(ax)$.
 2. Se ramener à la question précédente...
-

Indication pour l'exercice 36 ▲

Déterminer un intervalle (le plus grand possible) sur lequel cette fonction est égale à l'identité. Conclure par périodicité, parité, etc....

Indication pour l'exercice 37 ▲

Utiliser $\sin^2 + \cos^2 = 1$ pour la première et la deuxième expression, et pour la troisième, $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Indication pour l'exercice 38 ▲

1. Chercher les x tels que $-1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1$.
 2. Prendre $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, utiliser les formules de trigo et la définition de arcsin. Faire attention à être dans le bon intervalle !
-

Indication pour l'exercice 39 ▲

Écrire sous la forme $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ et appliquer la fonction cosinus (en justifiant !) Ou bien dériver.

Indication pour l'exercice 40 ▲

Commencer par étudier quand on a $-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1$.

Indication pour l'exercice 41 ▲

1. Prendre le carré.
 2. Préciser l'intervalle de définition, dériver et étudier le signe de la dérivée à l'aide de la question précédente.
-

Indication pour l'exercice 42 ▲

1. $\cos(\pi/6)$...
 2. Faire attention aux valeurs prises par arctan.
 3. Trouver une solution "évidente" puis démontrer que c'est la seule.
-

Indication pour l'exercice 43 ▲

1. Prendre le sinus et bien fonctionner par équivalence.
 2. Idem.
 3. Prendre la tangente des deux membres et utiliser la formule $\tan(a+b) = \dots$. Attention, on n'obtient pas une équation équivalente, il faut vérifier si les solutions obtenues sont bien des solutions de l'équation initiale.
 4. Poser $x = \sin \theta$.
 5. Minorer $\arctan 2 + \arctan 3$.
-

Indication pour l'exercice 44 ▲

Utiliser une formule de trigonométrie pour exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ pour simplifier l'expression demandée.

Indication pour l'exercice 45 ▲

1. Prendre la tangente et vérifier qu'on est dans le bon intervalle !
 2. C'est une somme télescopique !
-

Indication pour l'exercice 46 ▲

Dériver les fonctions pour prouver qu'elles sont constantes ! Déterminer la constante en étudiant des points particuliers, ou des limites.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. \sqrt{y} est défini si et seulement si $y \geq 0$. On cherche donc les réels x tels que

$$2x^2 - 12x + 18 \geq 0 \iff x^2 - 6x + 9 \geq 0 \iff (x-3)^2 \geq 0.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée et donc le domaine de définition de la fonction est \mathbb{R} .

2. $\ln y$ est défini si et seulement si $y > 0$. On cherche donc les réels x tels que

$$x^2 + 4x + 4 > 0 \iff (x+2)^2 > 0.$$

L'ensemble de définition de la fonction est donc $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

3. D'abord le dénominateur ne doit jamais s'annuler, ce qui exclut la valeur -7 du domaine de définition. Sinon, le dénominateur est toujours strictement positif, et on cherche donc les $x \neq -7$ pour lesquels $8 - 16x \geq 0$ ce qui est équivalent à $x \leq \frac{1}{2}$. L'ensemble de définition est donc $] -\infty, \frac{1}{2}] \setminus \{-7\}$.

4. On remarque d'abord que $\ln(3-x)$ est défini si et seulement si $3-x > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x < 3$. De même $\sqrt{x-1}$ est défini pour $x-1 \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \geq 1$. Enfin, 2 est une valeur interdite. Le domaine de définition de la fonction est donc $\mathcal{D} = [1, 3[\setminus \{2\}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Dans ce genre d'exercices, le plus naturel est de revenir à la définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}(f \times g)(-x) &= f(-x) \times g(-x) \\ &= (-f(x)) \times (-g(x)) \\ &= f(x) \times g(x) \\ &= (f \times g)(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $f \times g$ est paire. De même,

$$\begin{aligned}(f + g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= (-f(x)) + (-g(x)) \\ &= -(f(x) + g(x)) \\ &= -(f + g)(x).\end{aligned}$$

Donc $f + g$ est impaire. Enfin,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(-x) &= f(g(-x)) \\ &= f(-g(x)) \\ &= -f(g(x)) \\ &= -(f \circ g)(x).\end{aligned}$$

Donc $f \circ g$ est impaire.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}f_1(-x) &= e^{-x} - e^{-(-x)} \\ &= e^{-x} - e^x = -f_1(x).\end{aligned}$$

La fonction f_1 est impaire. De même,

$$\begin{aligned}f_2(-x) &= \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} \\ &= \frac{e^{-2x}(1 - e^{2x})}{e^{-2x}(1 + e^{2x})} \\ &= -\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -f_2(x).\end{aligned}$$

La fonction f_2 est impaire. Enfin,

$$\begin{aligned}f_3(-x) &= \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} \\&= \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(1 + e^x)^2} \\&= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} = f_3(x).\end{aligned}$$

La fonction f_3 est elle aussi paire.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Posons $X = e^x$. Alors l'équation devient $X^2 - X - 6 = 0$. Les racines de cette équation sont $X = -2$ et $X = 3$. Mais seule la racine positive nous intéresse ici, car l'exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. On en déduit que l'équation admet une unique racine, qui est égale à $\ln 3$.

2. On pose de même $X = e^x$. L'équation devient $3X - \frac{7}{X} - 20 = 0$, qui est encore équivalente à $3X^2 - 20X - 7 = 0$ (on ne s'intéresse qu'aux solutions strictement positives). Les solutions de cette dernière équation sont $X = -1/3$ et $X = 7$. Seule la seconde est strictement positive. On déduit donc que l'équation $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$ admet une unique solution donnée par $x = \ln(7)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. La première équation est équivalente à $e^{x+y} = 10$ ou encore, en utilisant le logarithme, à $x + y = \ln(10) = \ln(2) + \ln(5)$. La seconde équation est équivalente, toujours en utilisant le logarithme, à $x - y = \ln(2/5) = \ln(2) - \ln(5)$. Ainsi, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y &= \ln(2) + \ln(5) \\ x - y &= \ln(2) - \ln(5). \end{cases}$$

On trouve alors facilement que le seul couple solution est $x = \ln(2)$, $y = \ln(5)$.

2. On résout le système classiquement. On trouve qu'il est équivalent à

$$\begin{cases} e^x &= 3 \\ e^y &= 4. \end{cases}$$

Prenant le logarithme, on trouve un seul couple solution donné par $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$.

3. Posons $a = e^x$ et $b = e^y$. Le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} 5a - b &= 19 \\ ab &= 30 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= 5a - 19 \\ a(5a - 19) &= 30 \end{cases}$$

La seconde équation est une équation du second degré : $5a^2 - 19a - 30 = 0$. Ces solutions sont $a = -6/5$ et $a = 5$. Mais a doit être strictement positif, donc $-6/5$ ne convient pas. On a donc $a = 5$ et $b = 6$. La seule solution du système est donc le couple $x = \ln(5)$ et $y = \ln(6)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

D'une part, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

De l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$, valable pour tout $x > -1$, on déduit

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

soit

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq 1.$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \leq \exp(1) = e.$$

D'autre part, on a

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} = \exp \left(-n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right).$$

En utilisant la même inégalité, on a

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \leq -\frac{1}{n}$$

soit en multipliant par $-n < 0$

$$-n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \geq 1.$$

On conclut à nouveau par croissance de la fonction exponentielle.

Correction de l'exercice 7 ▲

La première limite donne une forme indéterminée ∞/∞ . On lève l'indétermination en factorisant par e^x au dénominateur :

$$\frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{e^x}{e^x(2 + e^{-3x})} = \frac{1}{2 + e^{-3x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{1}{2}.$$

La deuxième limite n'est pas une forme indéterminée. En effet, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x + e^{-2x} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = 0.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

On va étudier g . Pour cela, il faut aller jusqu'à la dérivée seconde ! En effet, g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+ , avec $g'(x) = (x-1)e^x + 1$. Il ne semble pas facile d'étudier directement le signe de g' . On va donc calculer la dérivée de g' , qui est $g''(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}_+$. g'' est positive sur \mathbb{R}_+ , donc g' est croissante sur cet intervalle. De plus, $g'(0) = 0$ donc g' est positive sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, g est croissante sur \mathbb{R}_+ et comme $g(0) = 0$, g est positive sur \mathbb{R}_+ .

Correction de l'exercice 9 ▲

1. On factorise

$$\exp(x) - x^3 = \exp(x) \left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)} \right).$$

Par le théorème de croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\exp(x)} = 0.$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)} \right) = 1$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) \left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)} \right) = +\infty.$$

2. On factorise

$$\ln(x) - x - \sqrt{x} = x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

Par le théorème de croissance comparée et les limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -1$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty.$$

3. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Or, par les limites usuelles et les opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty.$$

4. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)} = \frac{x \left(7 + \frac{\ln(x)}{x} \right)}{\exp(x) \left(\frac{7x}{\exp(x)} + 1 \right)} = \frac{x}{\exp(x)} \times \frac{7 + \frac{\ln(x)}{x}}{\frac{7x}{\exp(x)} + 1}.$$

Par le théorème de croissance comparée et les opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 + \frac{\ln(x)}{x} \right) = 7, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x}{\exp(x)} + 1 \right) = 1$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + \frac{\ln(x)}{x}}{\frac{7x}{\exp(x)} + 1} = 7.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)} = 0$.

5. On pose $u = \sqrt{3x}$ de sorte que si $x \rightarrow +\infty$, alors $u \rightarrow +\infty$. De plus, $x = \frac{u^2}{3}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})} &= \frac{\ln\left(\frac{u^2}{3}\right)}{\exp(u)} \\ &= \frac{\ln(u^2) - \ln(3)}{\exp(u)} \\ &= \frac{2\ln(u) - \ln(3)}{\exp(u)} \\ &= 2\frac{\ln(u)}{\exp(u)} - \frac{\ln(3)}{\exp(u)}.\end{aligned}$$

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(2\frac{\ln(u)}{\exp(u)} - \frac{\ln(3)}{\exp(u)} \right) = 0$.

6. On écrit $x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \exp(-1)$ puis on pose $u = 1/x$ de sorte que si $x \rightarrow 0^+$ alors $u \rightarrow +\infty$.

On a alors

$$\begin{aligned}x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right) &= x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \exp(-1) \\ &= \frac{1}{u} \exp(u) \exp(-1) \\ &= \exp(-1) \times \frac{\exp(u)}{u}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(-1) \times \frac{\exp(u)}{u} = +\infty.$$

7. On écrit

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} &= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}} \\ &= \frac{(x+2) - (x+7)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}}\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7} = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}) = +\infty$. Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}) = 0.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. On met e^x en facteur :

$$\ln(x) - e^x = e^x \left(-1 + \frac{\ln x}{e^x} \right).$$

Or, par le théorème de croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$. On en déduit que la fonction tend vers $-\infty$.

2. On pose $u = \sqrt{x}$. Si x tend vers $+\infty$, u aussi et on a (par le théorème de composition des limites)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^6}{\exp(u)} = 0,$$

par croissance comparée des fonctions puissance et exponentielle.

3. Il faut prendre garde au fait que l'on n'a pas $\ln(x)$, mais plutôt quelque chose qui est proche de $\ln(\exp(x))$, et donc de x . L'idée est de mettre $\exp(x)$ en facteur dans le logarithme, puis d'utiliser les propriétés du logarithme. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}} &= \frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\ln(e^x) + \ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x \left(1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}\right)}{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} \times \left(1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}\right).\end{aligned}$$

Mais, quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, donc par composition $\ln(1+e^{-x}) \rightarrow 0$, ce qui entraîne $1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x} \rightarrow 1$. On en déduit que la fonction tend vers $+\infty$.

4. On met en facteur les termes dominants, et on utilise les propriétés de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}\frac{\exp(\sqrt{x}) + 1}{\exp(x^2) + 1} &= \frac{\exp(\sqrt{x})(1 + \exp(-\sqrt{x}))}{\exp(x^2)(1 + \exp(-x^2))} \\ &= \exp(\sqrt{x} - x^2) \times \frac{1 + \exp(-\sqrt{x})}{1 + \exp(-x^2)}.\end{aligned}$$

Mais, lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1 + \exp(-\sqrt{x})}{1 + \exp(-x^2)}$ tend vers 1, et $\sqrt{x} - x^2$ tend vers $-\infty$ donc par composition des limites, $\exp(\sqrt{x} - x^2)$ tend vers 0. On en déduit que la limite recherchée est 0.

Correction de l'exercice 11 ▲

Notons t_0 le temps (en heures) entre la mort et l'arrivée du médecin légiste. L'énoncé nous donne les informations suivantes :

$$T(t_0) = 32, \quad T(t_0 + 1/2) = 31.$$

Utilisant la formule donnant $T(t)$, on trouve donc

$$Ae^{-ct_0} = 12 \text{ et } Ae^{-c(t_0+1/2)} = 11.$$

Effectuons le quotient des deux équations. On trouve, d'après les propriétés de la fonction exponentielle,

$$\frac{e^{-c(t_0+1/2)}}{e^{-ct_0}} = \frac{11}{12} \iff e^{-c/2} = \frac{11}{12}.$$

Prenant le logarithme, on en déduit que

$$\frac{-c}{2} = \ln\left(\frac{11}{12}\right) \iff c = 2\ln\left(\frac{12}{11}\right) \simeq 0,174.$$

On peut ensuite calculer A en sachant que, au moment du crime, la température du corps était de 37°C . Ainsi, on a $A + 20 = 37$ ce qui donne $A = 17$. On calcule alors facilement t_0 car

$$17e^{-ct_0} + 20 = 32 \iff e^{-ct_0} = \frac{12}{17} \iff -ct_0 = \ln\left(\frac{12}{17}\right).$$

On trouve donc finalement que

$$t_0 = \frac{\ln\left(\frac{17}{12}\right)}{c} \simeq 2,001.$$

Le crime a eu lieu environ 2h avant la première prise de température par le médecin légiste.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. De la relation $C_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = C_0/2$, on tire $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

2. On commence par calculer le coefficient λ de l'aztréonam. En utilisant la relation précédente, on trouve $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \simeq 0,4$. Le volume sanguin du patient est égal à $60 \times 0,07 = 4,2$ L. Chaque injection de 2g correspond donc à une augmentation de la concentration de $2000/4,2 = 476 \text{mg.L}^{-1}$. Pour la première injection, on a $C_0 = 476$ et on cherche T_1 tel que $476 e^{-0,4 T_1} = 49$ soit

$$T_1 = -\frac{\ln\left(\frac{49}{476}\right)}{0,4} \simeq 5,68 \text{h.}$$

Lorsqu'on réalise la deuxième injection, et de même pour les suivantes, la concentration du médicament est cette fois au moins de $49 + 476 = 525$. On cherche donc cette fois T_2 tel que $525 e^{-0,4 T_2} = 49$, soit

$$T_1 = -\frac{\ln\left(\frac{49}{525}\right)}{0,4} \simeq 5,92 \text{h.}$$

3. On commence par calculer le coefficient λ de l'aztréonam. En utilisant la relation précédente, on trouve $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \simeq 0,4$. Le volume sanguin du patient est égal à $60 \times 0,07 = 4,2$ L. Chaque injection de 2g correspond donc à une augmentation de la concentration de $2000/4,2 = 476 \text{mg.L}^{-1}$. Pour la première injection, on a $C_0 = 476$ et on cherche T_1 tel que $476 e^{-0,4 T_1} = 49$ soit

$$T_1 = -\frac{\ln\left(\frac{49}{476}\right)}{0,4} \simeq 5,68 \text{h.}$$

4. Lorsqu'on réalise la deuxième injection, et de même pour les suivantes, la concentration du médicament est cette fois au moins de $49 + 476 = 525$. On cherche donc cette fois T_2 tel que $525 e^{-0,4 T_2} = 49$, soit

$$T_1 = -\frac{\ln\left(\frac{49}{525}\right)}{0,4} \simeq 5,92 \text{h.}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. La fonction g est dérivable et sa dérivée est $g'(x) = 1 + 2e^{2x}$ qui est strictement positive. Ainsi, g est strictement croissante. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 1 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'on peut bien appliquer puisque g est continue, il existe $c \in]-\infty, 0[$ tel que $g(c) = 0$. La stricte croissance de g assure que $g(x) < 0$ si $x < c$ et $g(x) > 0$ si $x > c$. Remarquons qu'il n'était pas besoin de dériver g pour démontrer que cette fonction est strictement croissante. On aurait aussi pu remarquer que c est la somme de deux fonctions strictement croissantes.

2. Minimiser la distance d'un point à l'origine ou minimiser le carré de la distance à l'origine est le même problème. Soit (x, e^x) un point de la courbe. Le carré de sa distance à l'origine est donné par

$$f(x) = x^2 + e^{2x}.$$

Il s'agit de démontrer que cette fonction admet un unique minimum. f est dérivable et sa dérivée est donnée par la fonction $2g$. D'après la question précédente, f est strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty, c[$ et strictement croissante sur $]c, +\infty[$. Ainsi, il y a un unique point de la courbe minimisant la distance à l'origine, le point $(c, \exp(c))$.

3. La droite (OM_0) a pour vecteur directeur $(c, \exp(c))$. La tangente à la courbe en M_0 a pour vecteur directeur $(1, \exp'(c)) = (1, \exp(c))$. Les deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. On calcule donc leur produit scalaire qui vaut

$$c + \exp(2c) = g(c) = 0.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Voici les réponses :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	16	50	500	$\sqrt{27}$
$\log x$	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1,204	1,699	2,699	0,716

Voici les explications :

$\log(4) = \log(2 \times 2) = \log(2) + \log(2)$ $\log(5) = \log(10/2) = \log(10) - \log(2) = 1 - \log(2)$ $\log(6) = \log(2 \times 3) = \log(2) + \log(3)$ $\log(8) = \log(2 \times 4) = \log(2) + \log(4)$ $\log(9) = \log(3 \times 3) = \log(3) + \log(3)$ $\log(16) = \log(4 \times 4) = \log(4) + \log(4)$ $\log(50) = \log(5 \times 10) = \log(5) + 1$ $\log(500) = \log(5 \times 10^2) = \log(5) + 2$ $\log(\sqrt{27}) = \log(3\sqrt{3}) = \log(3) + \frac{1}{2}\log(3) = \frac{3}{2}\log(3)$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Cherchons d'abord les valeurs de x pour lesquelles cette expression a un sens. On doit avoir $x^2 - 1 > 0$ et $2x - 1 > 0$, soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $x \in]1/2, +\infty[$. On trouve finalement que l'expression a un sens pour $x > 1$. Utilisons les propriétés fonctionnelles de la fonction logarithme. On trouve que l'équation est équivalente à

$$\ln\left(\frac{x^2 - 1}{2x - 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

En composant par la fonction exponentielle (ou en utilisant le fait que le logarithme est bijectif), on trouve que l'équation est équivalente à

$$\frac{x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{1}{2}.$$

La résolution de cette équation donne les racines $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Seule la deuxième racine est dans l'intervalle voulu, et l'équation admet donc une unique solution qui est $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

2. Remarquons que l'équation n'a un sens que pour $x > 1$. D'après les propriétés de la fonction logarithme, l'équation, pour $x > 1$, est encore équivalente à

$$\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \ln(x-1).$$

La fonction logarithme népérien étant injective (ou bien en composant par la fonction exponentielle), l'équation devient

$$\frac{x+2}{x+1} = x-1 \iff x^2 - x - 3 = 0.$$

Les deux solutions de cette équation sont $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. Seule x_1 est dans $]1, +\infty[$. L'équation n'admet donc qu'une solution, x_1 .

Correction de l'exercice 16 ▲

Notons $x = 2^{43112609}$ et notons n son nombre de chiffres en base 10. Alors on a

$$10^{n-1} \leq x < 10^n.$$

Prenant le logarithme, il vient

$$(n-1)\ln(10) \leq \ln(x) < n\ln(10)$$

puis

$$n-1 \leq \frac{\ln(x)}{\ln(10)} < n.$$

Puisque $\ln(x)/\ln(10) = 43112609\ln(2)/\ln(10) \simeq 12978188.5$, le nombre de chiffres vaut 12978189.

Correction de l'exercice 17 ▲

Soit $a > 0$ et $(a, \ln(a))$ un point sur la courbe représentative du logarithme. La tangente à la courbe en ce point a pour équation

$$y - \ln(a) = \frac{1}{a}(x - a).$$

Elle passe par l'origine si et seulement si

$$0 - \ln a = \frac{1}{a}(0 - a) \iff -\ln a = -1 \iff a = e.$$

Il y a donc un unique point pour lequel la tangente à la courbe représentative passe par l'origine, le point $(e, 1)$.

Correction de l'exercice 18 ▲

On pose, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

Alors f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} \geq 0.$$

Ainsi, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus, $f(0) = 0$, donc, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$ ce qui entraîne $\ln(1+x) \leq x$. Pour démontrer l'autre inégalité, on introduit cette fois la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

g est donc croissante sur \mathbb{R}_+ et $g(0) \geq 0$, donc pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \geq 0 \iff x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Cette inéquation a un sens lorsque $x > -1$. De plus, $2x - 7$ est strictement négatif sur $] -1, 7/2[$, strictement positif sur $]7/2, +\infty[$ tandis que $\ln(x+1)$ est strictement négatif sur $] -1, 0[$ et strictement positif sur $]0, +\infty[$. En dressant le tableau de signes, on trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -1, 0[\cup]7/2, +\infty[$.

2. Cette inéquation a un sens si et seulement si $\frac{x+1}{3x-5} > 0$. En effectuant un tableau de signes, on déduit que son domaine de définition est $\mathcal{D} =] -\infty, -1[\cup]5/3, +\infty[$. Soit $x \in \mathcal{D}$. L'inéquation est équivalente à

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq \ln(1) \iff \frac{x+1}{3x-5} \leq 1$$

par croissance de la fonction logarithme. Il faut donc résoudre cette dernière inéquation. Mais

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{3x-5} \leq 1 &\iff \frac{x+1}{3x-5} - 1 \leq 0 \\ &\iff \frac{x+1-3x+5}{3x-5} \leq 0 \\ &\iff \frac{-2x+6}{3x-5} \leq 0. \end{aligned}$$

En effectuant un tableau de signes, on trouve que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty, 5/3[\cup [3, +\infty[$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$$

(attention ! l'intervalle est bien ouvert en -1 et fermé en 3 !).

3. Rappelons que $\ln(e^{-1}) = -1$ et que $\ln(e^2) = 2$. Par croissance de la fonction logarithme, on a $\ln(x) + 1 \geq 0 \iff x \geq e^{-1}$ et $\ln(x) - 2 \geq 0 \iff x \geq e^2$. En dressant un tableau de signes, on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]0, e^{-1}[\cup]e^2, +\infty[$.

Correction de l'exercice 20 ▲

Remarquons d'abord que dans les deux cas, on cherche à résoudre l'équation seulement pour $x > 0$ et $y > 0$.

1. Par les propriétés algébriques du logarithme, la deuxième ligne du système est équivalente à

$$\ln(xy) = \ln(6^3) = \ln(216).$$

La fonction logarithme étant bijective (ou par composition par la fonction exponentielle), on en déduit que $xy = 216$. Ainsi, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y &= 30 \\ xy &= 216 \end{cases}$$

Ainsi, par les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme du second degré, x et y sont solutions de l'équation $x^2 - 30x + 216 = 0$. Les solutions de cette dernière équation sont 12 et 18. Donc les solutions du système sont les couples (12, 18) et (18, 12).

2. De même qu'à la question précédente, la deuxième ligne du système est équivalente à

$$xy = 91.$$

Ainsi, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 218 \\ xy &= 91 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 &= 400 \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 36 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^2 &= 20^2 \\ (x-y)^2 &= 6^2 \end{cases}$$

Quitte à permuter le rôle joué par x et y , on peut supposer que $x \geq y$. Rappelons de plus que $x > 0$ et $y > 0$. On peut donc prendre la racine carrée de chacune des deux équations précédentes, ce qui donne le système

$$\begin{cases} x+y &= 20 \\ x-y &= 6 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont $x = 13$ et $y = 7$. Donc les solutions du système initial, en tenant compte de la symétrie de x et y , sont les couples (13, 7) et (7, 13).

Correction de l'exercice 21 ▲

Pour la première limite, on a une forme indéterminée de la forme ∞/∞ . On va lever cette forme indéterminée en factorisant par le terme dominant, $x \ln x$, au dénominateur. On écrit donc

$$\frac{\ln x}{1 + x \ln x} = \frac{\ln x}{x \ln x} \times \frac{1}{\frac{1}{x \ln x} + 1} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\frac{1}{x \ln x} + 1}.$$

Comme $1/x \ln x$ tend vers 0 en $+\infty$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x \ln x} + 1} = 1$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + x \ln x} = 0.$$

La deuxième limite n'est pas une forme indéterminée, puisque le dénominateur tend vers 1 lorsque x tend vers 0^+ et que le numérateur tend vers $-\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + x \ln x} = -\infty.$$

Correction de l'exercice 22 ▲

Pour $x > 0$, posons $f(x) = x \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et de plus sa dérivée vérifie

$$f'(x) = \ln(x) + 1.$$

Or, $\ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq \exp(-1)$. Ainsi, $f'(x) > 0$ si $x > \exp(-1)$ et $f'(x) < 0$ si $x < \exp(-1)$. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 < 1$ et donc l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solutions dans l'intervalle $]0, e^{-1}]$. On a aussi $f(e^{-1}) = -e^{-1} < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi f , qui est continue et strictement croissante, réalise une bijection de $[e^{-1}, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$. Comme $1 \in [-e^{-1}, +\infty[$, l'équation $x \ln(x) = 1$ admet une unique solution dans cet intervalle. Finalement, on a prouvé que l'équation $x \ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 23 ▲

Le logarithme étant une fonction croissante, on a $2^n \geq n^2$ si et seulement si $n \ln 2 \geq 2 \ln n$. Ceci nous incite à introduire et étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x.$$

Cette fonction est dérivable, et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{x \ln 2 - 2}{x}.$$

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 2/\ln 2 \simeq 2,88$ et donc f est croissante sur l'intervalle $[3, +\infty[$. Remarquons ensuite que $f(4) = 4 \ln 2 - 2 \ln 4 = 0$. Donc f est positive sur l'intervalle $[4, +\infty[$. Ainsi, l'inégalité est vraie pour tous les entiers naturels $n \geq 4$. On peut tester à la main ce qui se passe pour $n = 0, 1, 2, 3$, et on trouve qu'elle est vraie en 0, 1, 2 et fausse en 3.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. On écrit

$$x^{-n} f(x) = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}.$$

On en déduit que $x^{-n} f(x)$ tend vers a_n lorsque $x \rightarrow +\infty$.

2. On écrit

$$x^{q-p} \ln x = \frac{x^{-p} P(x)}{x^{-q} Q(x)}.$$

D'après la question précédente, $x^{-p} P(x)$ converge vers un réel non nul ℓ_1 lorsque $x \rightarrow +\infty$, et $x^{-q} Q(x)$ tend vers un réel non nul ℓ_2 lorsque $x \rightarrow +\infty$. On en déduit que $x^{q-p} \ln x$ tend vers le réel non-nul ℓ_1/ℓ_2 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3. Le résultat de la question précédente contredit les limites comparées de fonctions puissance et logarithme au voisinage de $+\infty$. En effet, posons $n = q - p$.

si $n \geq 0$, alors $x^n \ln(x) \rightarrow +\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée); si $n \leq -1$, ie $n = -m$ avec $m \geq 1$, alors on écrit

$$x^n \ln x = \frac{\ln x}{x^m} \rightarrow 0.$$

Dans aucun cas, il n'est possible que $x^{q-p} \ln x$ converge vers une limite finie. L'hypothèse faite est donc fausse, et le logarithme n'est pas une fraction rationnelle.

4. si $n \geq 0$, alors $x^n \ln(x) \rightarrow +\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée);

5. si $n \leq -1$, ie $n = -m$ avec $m \geq 1$, alors on écrit

$$x^n \ln x = \frac{\ln x}{x^m} \rightarrow 0.$$

Correction de l'exercice 25 ▲

Procédons par l'absurde, et supposons que $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$ est rationnel ; avec p et q des entiers naturels, avec $q \neq 0$. Ceci s'écrit encore

$$\frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{p}{q} \iff q \ln 2 = p \ln 10 \iff \ln(2^q) = \ln(10^p) \iff 2^q = 10^p.$$

Ceci se réécrit encore $2^p 5^p = 2^q$. Par unicité du développement en facteurs premiers, on obtiendrait nécessairement que $p = q$ et que $p = 0$ et donc $q = 0$, ce qui est une contradiction avec ce qu'on a supposé. Donc $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Correction de l'exercice 26 ▲

1. Rappelons que x^x signifie $\exp(x \ln(x))$. La fonction $x \mapsto x^x$, que l'on va noter f , est donc définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Si on pose $g(x) = x \ln(x)$, g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée vérifie $g'(x) = \ln(x) + 1$. On en déduit que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = (\ln(x) + 1) \exp(x \ln x).$$

On a $\ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq \exp(-1)$. La fonction f est donc décroissante sur $]0, \exp(-1)]$ et croissante sur $[\exp(-1), +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $\exp(0) = 1$. On en déduit par composition que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$. De la même façon, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(u) = +\infty$, d'où l'on tire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty$. Remarquons de plus que $f(\exp(-1)) = \exp(\exp(-1) \ln(\exp(-1))) = \exp(-e^{-1})$, réel que l'on va noter a pour plus de commodité. On obtient donc le tableau de variations suivant :

2. Puisque f est continue et strictement décroissante sur $]0, \exp(-1)]$, elle réalise une bijection de $]0, \exp(-1)]$ sur $[a, 1[$. Puisque f est continue et strictement croissante sur $[\exp(-1), +\infty[$, elle réalise une bijection de $[\exp(-1), +\infty[$ sur $[a, +\infty[$. On en déduit que l'équation $x^x = y$ admet

aucune solution si $y < a$; une seule solution si $y = a$ (à savoir $x = \exp(-1)$); deux solutions si $y \in]a, 1[$, l'une dans $]0, \exp(-1)[$, l'autre dans $] \exp(-1), +\infty[$; une solution si $y \geq 1$, dans $] \exp(-1), +\infty[$.

3. aucune solution si $y < a$;

4. une seule solution si $y = a$ (à savoir $x = \exp(-1)$);

5. deux solutions si $y \in]a, 1[$, l'une dans $]0, \exp(-1)[$, l'autre dans $] \exp(-1), +\infty[$;

6. une solution si $y \geq 1$, dans $] \exp(-1), +\infty[$.

Correction de l'exercice 27 ▲

Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que sur $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle, en passant par l'écriture exponentielle des puissances, on a

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\iff e^{\sqrt{x} \ln x} = e^{x \ln \sqrt{x}} \\ &\iff \sqrt{x} \ln x = \frac{x}{2} \ln x \text{ car la fonction exp est injective} \\ &\iff (\ln x = 0) \text{ ou } (x = 2\sqrt{x}) \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

(rappelons qu'on a supposé a priori $x > 0$).

Correction de l'exercice 28 ▲

On va développer le membre de droite. On a d'une part

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \times \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \times \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}.\end{aligned}$$

En effectuant la somme, on trouve

$$\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \operatorname{sh}(x+y).$$

La preuve de l'autre égalité est complètement similaire.

Correction de l'exercice 29 ▲

Posons $f(x) = \operatorname{sh}(x) - x$. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée vérifie $f'(x) = \operatorname{ch}(x) - 1$. Comme $\operatorname{ch}(0) = 1$ et que ch est croissante, on a $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Ainsi, la fonction f est croissante. De plus, $f(0) = 0$. Ainsi, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Posons ensuite $g(x) = \operatorname{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée vérifie $g'(x) = \operatorname{sh}(x) - x \geq 0$ d'après la première partie. Ainsi g est croissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $g(0) = 0$, on a bien que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Correction de l'exercice 30 ▲

On a, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \cosh(kx) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n e^{kx} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n e^{-kx} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} + \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)x/2}}{e^{x/2}} \times \frac{e^{-(n+1)x/2} - e^{(n+1)x/2}}{e^{-x/2} - e^{x/2}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{-(n+1)x/2}}{e^{-x/2}} \times \frac{e^{(n+1)x/2} - e^{-(n+1)x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{nx/2} \frac{\sinh((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)} + e^{-nx/2} \frac{\sinh((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)} \right) \\ &= \frac{\cosh(nx/2) \sinh((n+1)x/2)}{\sinh(x/2)}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 31 ▲

Utilisant la définition de la fonction cosinus hyperbolique, on sait que

$$\cosh x = 2 \iff e^x + e^{-x} - 4 = 0 \iff e^{-x}(e^{2x} + 1 - 4e^x) = 0.$$

La fonction exponentielle ne s'annulant jamais, l'équation est équivalente à

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0.$$

On pose $X = e^x$ et on résoud

$$X^2 - 4X + 1 = 0.$$

Ses racines sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$, qui sont tous les deux des réels positifs. Les solutions de l'équation sont donc $\ln(2 - \sqrt{3})$ et $\ln(2 + \sqrt{3})$.

Correction de l'exercice 32 ▲

1. f est paire car c'est le produit de deux fonctions impaires. On peut donc se restreindre à étudier f sur $]0, +\infty[$.

2. On pose $y = 1/x$. Alors

$$f(x) = \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{\sinh(y) - \sinh(0)}{y - 0}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, y tend vers 0, et cette quantité tend vers la dérivée de \sinh en 0, c'est-à-dire $\cosh(0) = 1$. La limite en $-\infty$ s'obtient par parité. Enfin, en 0^+ , on a toujours en posant $y = 1/x$

$$f(x) = \frac{\sinh(y)}{y} = \frac{e^y}{2y} - \frac{e^{-y}}{2y}.$$

Par croissance comparée, $e^y/y \rightarrow +\infty$ lorsque $y \rightarrow +\infty$, alors que $e^{-y}/y \rightarrow 0$ (ce n'est pas une forme indéterminée). On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

3. f est dérivable sur \mathbb{R}^* car $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et $y \mapsto \sinh(y)$ est dérivable sur \mathbb{R} . La dérivée, obtenue par la formule de dérivation d'une composée, vaut :

$$f'(x) = \sinh(1/x) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \cosh(1/x) = \cosh(1/x) (\tanh(1/x) - 1/x).$$

4. On commence par étudier la fonction auxiliaire $g(y) = \tanh(y) - y$. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, et sa dérivée vaut

$$g'(y) = (1 - \tanh^2(y)) - 1 = -\tanh^2(y) \leq 0.$$

g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$, et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $g(y) \leq 0$ pour tout $y \geq 0$. On en déduit que f' est négative sur $]0, +\infty[$, et donc que f est décroissante sur cet intervalle. On vous laisse tracer le tableau de variations et voici la courbe :

Correction de l'exercice 33 ▲

Il faut trouver $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin(x) = -1/2$. La valeur de $\arcsin(-1/2)$ est donc $-\pi/6$. Il faut ensuite trouver $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x) = -\sqrt{2}/2$. On trouve donc $\arccos(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$. Il faut enfin trouver $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan(x) = \sqrt{3}$. On trouve $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$.

Correction de l'exercice 34 ▲

L'erreur à ne pas faire est de croire que $\arccos \cos x = x$. Ceci n'est vrai que si $x \in [0, \pi]$ puisque \cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et que \arccos en est la bijection réciproque. Il faut donc se ramener, par périodicité et parité du cosinus, à l'intervalle $[0, \pi]$. Ainsi :

$2\pi/3 \in [0, \pi]$ et donc $\arccos \cos(2\pi/3) = 2\pi/3$. $-2\pi/3$ n'est pas dans l'intervalle $[0, \pi]$, mais $\cos(-2\pi/3) = \cos(2\pi/3)$ et donc $\arccos \cos(-2\pi/3) = 2\pi/3$. $4\pi/3$ n'est pas dans $[0, \pi]$, mais on a

$$\cos(4\pi/3) = \cos(4\pi/3 - 2\pi) = \cos(-2\pi/3) = \cos(2\pi/3).$$

On a donc aussi $\arccos(\cos \frac{4\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$. Pour le dernier exemple, on commence par se ramener à un cosinus en utilisant la formule $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. On a donc

$$\arccos\left(\sin \frac{17\pi}{5}\right) = \arccos\left(\cos \frac{-29\pi}{10}\right) = \arccos\left(\cos \frac{9\pi}{10}\right) = \frac{9\pi}{10}$$

puisque $\frac{9\pi}{10}$ est dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Correction de l'exercice 35 ▲

1. En utilisant la dérivée de \arctan et la dérivée d'une fonction du type $g(ax)$, on trouve que

$$f'(x) = a \times \frac{1}{1+a^2x^2}.$$

2. Posons $g(x) = \frac{1}{4+x^2}$. On va se ramener à la question précédente en remarquant que

$$g(x) = \frac{1}{4(1+x^2/4)} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2x^2} = \frac{1}{2} \times f'(x)$$

en choisissant $a = 1/2$. Une primitive de g est donc la fonction

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Correction de l'exercice 36 ▲

1. La fonction \tan réalise une bijection de $] -\pi/2, \pi/2[$ sur \mathbb{R} , dont la bijection réciproque est \arctan . En particulier, pour tout $x \in] -\pi/2, \pi/2[$, on a $\arctan(\tan(x)) = x$. De plus, puisque \tan est π -périodique,

$$\arctan(\tan(x + \pi)) = \arctan(\tan(x)).$$

On peut donc déduire la courbe représentative de la fonction, qui est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ par translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. La fonction \cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, dont la bijection réciproque est \arccos . Ainsi, pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $\arccos(\cos(x)) = x$. Puisque \cos est paire, il en est de même de la fonction $x \mapsto \arccos(\cos(x))$. Enfin, cette fonction est aussi 2π -périodique. On en déduit la courbe représentative de la fonction à partir de sa représentation sur $[0, \pi]$, d'abord par symétrie par rapport à l'axe (Oy) , puis par translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. La fonction \sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$, dont la bijection réciproque est \arcsin . Ainsi, pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\arcsin(\sin(x)) = x$. Malheureusement, l'impairité de cette fonction ne nous permet pas d'agrandir sa représentation graphique à un intervalle de longueur 2π (on conclut ensuite par 2π -périodicité). Mais on sait que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et donc si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\arcsin(\sin(\pi - x)) = x.$$

Posons $t = \pi - x$. Si x décrit l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, alors $t = \pi - x$ décrit l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$, et on a

$$\arcsin(\sin(t)) = \pi - t.$$

Ceci nous permet de représenter la fonction sur l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$, puis d'étendre à \mathbb{R} tout entier.

Correction de l'exercice 37 ▲

1. On a

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

De plus, $\arcsin x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et pour tout $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos(t) \geq 0$ et donc $\cos(t) = \sqrt{1 - \sin^2 t}$. On en déduit

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ce qui donne

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. On a $\arccos x \in [0, \pi]$ et pour tout $t \in [0, \pi]$, $\sin(t) \geq 0$ et donc $\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2 t}$. On en conclut que

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2 \arccos x} = \sqrt{1 - x^2}.$$

3. Puisque $\arctan x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on sait que $\cos(\arctan x) > 0$. De plus, on sait que

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

On en déduit

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \arctan x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Correction de l'exercice 38 ▲

1. L'ensemble de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = \left\{ x \in [-1, 1]; -1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 \right\}.$$

La double inégalité équivaut, en passant au carré, à

$$4x^2(1-x^2) \leq 1 \iff 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \iff (2x^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée et donc $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$.

2. Puisque le domaine de définition est $[-1, 1]$, il est légitime de poser $x = \sin t$ avec $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) \\ &= \arcsin(2 \sin t \cos t) \text{ car } t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ &= \arcsin(\sin 2t). \end{aligned}$$

On peut alors simplifier cette expression, mais il faut prendre garde que $\arcsin \sin u = u$ seulement pour $u \in [-\pi/2, \pi/2]$. Dans les autres cas, il faut se ramener à cet intervalle en utilisant les propriétés de la fonction sinus. On trouve

Si $t \in [-\pi/4, \pi/4]$, on a $2t \in [-\pi/2, \pi/2]$ et donc $\arcsin(\sin 2t) = 2t$. Si $t \in]\pi/4, \pi/2]$, alors $2t \in]\pi/2, \pi]$ et $\pi - 2t \in]0, \pi/2]$. De plus, $\sin(\pi - u) = \sin u$. On en déduit que dans ce cas,

$$\arcsin \sin 2t = \arcsin \sin(\pi - 2t) = \pi - 2t.$$

Si $t \in [-\pi/2, -\pi/4[$, alors $2t \in [-\pi, -\pi/2[$ et donc $\pi + 2t \in [0, \pi/2[$. De plus, $\sin(\pi + u) = -\sin(u)$. Utilisant l'imparité de la fonction arcsin, on trouve que dans ce cas

$$\arcsin \sin 2t = -\arcsin(-\sin(2t)) = -\arcsin(\sin(\pi + 2t)) = -\pi - 2t.$$

Finalement, on peut revenir à f utilisant la relation $t = \arcsin x$. On trouve que

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 2 \arcsin x & \text{si } x \in [-1, -\sqrt{2}/2[\\ 2 \arcsin x & \text{si } x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2] \\ \pi - 2 \arcsin x & \text{si } x \in]\sqrt{2}/2, 1]. \end{cases}$$

3. Si $t \in [-\pi/4, \pi/4]$, on a $2t \in [-\pi/2, \pi/2]$ et donc $\arcsin(\sin 2t) = 2t$.

4. Si $t \in]\pi/4, \pi/2]$, alors $2t \in]\pi/2, \pi]$ et $\pi - 2t \in]0, \pi/2]$. De plus, $\sin(\pi - u) = \sin u$. On en déduit que dans ce cas,

$$\arcsin \sin 2t = \arcsin \sin(\pi - 2t) = \pi - 2t.$$

5. Si $t \in [-\pi/2, -\pi/4[$, alors $2t \in [-\pi, -\pi/2[$ et donc $\pi + 2t \in [0, \pi/2[$. De plus, $\sin(\pi + u) = -\sin(u)$. Utilisant l'imparité de la fonction arcsin, on trouve que dans ce cas

$$\arcsin \sin 2t = -\arcsin(-\sin(2t)) = -\arcsin(\sin(\pi + 2t)) = -\pi - 2t.$$

Correction de l'exercice 39 ▲

Il y a deux méthodes classiques pour résoudre cet exercice. La première consiste à remarquer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ si et seulement si $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Or, $\arccos(x) \in [0, \pi]$ et $\pi/2 - \arcsin x \in [0, \pi]$. Puisque \cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, ceci est équivalent à dire

$$\cos(\arccos x) = \cos(\pi/2 - \arcsin x).$$

Mais, on a $\cos(\arccos x) = x$ et aussi

$$\cos(\pi/2 - \arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x$$

ce qui assure l'égalité demandée. L'autre méthode consiste à poser $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ et de remarquer que cette fonction est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Or, on a $f'(x) = 0$. On en déduit que f est constante sur l'intervalle $[-1, 1]$. Puisque $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \pi/2$, on a bien $\arccos(x) + \arcsin(x) = f(x) = \pi/2$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Correction de l'exercice 40 ▲

La fonction est bien définie pour les réels $x \neq 1$ tels que $-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1$. Or,

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{2+x-1}{1-x} = \frac{2}{1-x} - 1.$$

On en déduit que

$$-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1 \iff 0 \leq \frac{2}{1-x} \leq 2.$$

Ceci impose d'abord que $1-x > 0$ pour que l'inégalité de gauche soit vérifiée, c'est-à-dire $x < 1$. On en déduit alors que l'inégalité est équivalente à $1 \leq 1-x$ soit $x \leq 0$. Le domaine de définition de la fonction est donc \mathbb{R}_- . Son domaine de dérivabilité est $] -\infty, 0[$. En effet, par composition, f est dérivable en tout réel $x \neq 1$ tel que $-1 < \frac{1+x}{1-x} < 1$ et l'étude précédente reste valable avec des inégalités strictes et non des inégalités larges. Dérivons ensuite la fonction. Pour tout $x < 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - 1 - \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}} > 0. \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur $] -\infty, 0[$. On aurait pu également retrouver ce résultat en remarquant que la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est croissante sur $] -\infty, 0[$ et que la fonction \arcsin est croissante sur $] -1, 1[$. Par composition de deux fonctions croissantes, f est croissante. Enfin, puisque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1$$

on en déduit par composition que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi/2$. La courbe représentative de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\pi/2$. On obtient la courbe représentative suivante :

Correction de l'exercice 41 ▲

1. Remarquons déjà qu'on se limite à $x \in [-1, 1]$, pour que $\sqrt{1-x^2}$ ait un sens. Il est aussi clair que l'inégalité n'est pas vérifiée si $x \leq 0$. On se restreint donc à $x \in [0, 1]$, et, puisque tout est positif, on a

$$x \geq \sqrt{1-x^2} \iff x^2 \geq 1-x^2 \iff 2x^2 \geq 1 \iff x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'inégalité est donc vérifiée si et seulement si $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$.

2. Remarquons d'abord que la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$, et que pour ces valeurs de x , $\sqrt{1-x^2}$ est également bien définie. Le domaine de définition de f est donc $[-1, 1]$. De plus, f est dérivable sur $] -1, 1[$, et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} \\ &= \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right) e^{\arcsin x} \\ &= \frac{-x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x}. \end{aligned}$$

La question précédente nous donne le signe de la dérivée, et on en déduit le tableau de variations :

On peut aussi remarquer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = +\infty,$$

ce qui garantit l'existence de tangentes verticales aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$. La courbe représentative de la fonction est :

Correction de l'exercice 42 ▲

1. $\pi/6$ est bien dans l'intervalle $[0, \pi]$ des valeurs prises par arccos. Puisque $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que la seule solution de l'équation $\arccos(x) = \pi/6$ est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. La fonction arctan est à valeurs dans $] -\pi/2, \pi/2[$. L'équation n'a donc pas de solutions.

3. On peut commencer par remarquer que $\sqrt{2}/2$ est solution de l'équation puisque $\arccos(\sqrt{2}/2) = \arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$. Pour démontrer que c'est la seule, on peut écrire l'équation sous la forme $\arcsin(x) - \arccos(x) = 0$. Or, la fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et la fonction arccos est strictement décroissante sur ce même intervalle. Donc la fonction $x \mapsto \arcsin(x) - \arccos(x)$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$. L'équation $\arcsin(x) - \arccos(x) = 0$ ne peut donc avoir qu'une seule solution, celle que l'on a déjà trouvée. Une autre solution est de dire que si $\arcsin(x) = \arccos(x)$, alors $\sin(\arccos(x)) = \sin(\arcsin(x))$. Or, $\sin(\arcsin(x)) = x$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Cette dernière formule vient de

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

et du fait que $\arccos(x) \in [0, \pi]$, et donc $\sin(\arccos(x)) \geq 0$. Revenant à l'équation initiale, elle implique donc

$$x = \sqrt{1-x^2}.$$

Ceci entraîne que nécessairement $x \geq 0$. Passant au carré, x doit vérifier $x^2 = 1 - x^2$ dont la seule solution dans \mathbb{R}_+ est $\sqrt{2}/2$. Comme cette valeur est bien solution de l'équation, la seule solution de l'équation $\arcsin x = \arccos x$ est $\sqrt{2}/2$.

Correction de l'exercice 43 ▲

1. On utilise l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y = x \\ y \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}.$$

Dans le cas qui nous intéresse, puisque $0 \leq \arccos \frac{1}{3} \leq \pi/2$ et $-\pi/2 \leq -\arccos \frac{1}{4} \leq 0$, on a bien

$$\arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Prenant le sinus, l'équation est donc équivalente à

$$\begin{aligned} x &= \sin\left(\arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}\right) \\ &= \sin(\arccos 1/3) \cos(\arccos 1/4) - \sin(\arccos 1/4) \cos(\arccos 1/3) \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} \frac{1}{4} - \sqrt{1 - \frac{1}{4^2}} \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{8} - \sqrt{15}}{12}. \end{aligned}$$

2. On procède de la même façon, en remarquant que $\pi/3$ est bien élément de $[-\pi/2, \pi/2]$ et que l'on a toujours

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

(car $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ et $-1 - x^2 - 2x = -(1+x)^2 \leq 0$). L'équation est donc équivalente à

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il reste à résoudre cette équation du second degré, dont on trouve que les solutions sont $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$.

3. Si les deux membres sont égaux, alors ils ont même tangente. Utilisant la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, les solutions vérifient l'équation

$$\frac{5x}{1-6x^2} = 1 \iff 6x^2 + 5x - 1 = 0.$$

En calculant le discriminant de ce polynôme de degré deux, on trouve qu'il admet deux racines, à savoir $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{6}$. x_1 ne peut pas être solution de l'équation initiale $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$, puisque $x_1 \leq 0$ et donc $\arctan 2x_1 \leq 0$ et $\arctan 3x_1 \leq 0$. Pour x_2 , on sait que

$$\tan(\arctan 2x_2 + \arctan 3x_2) = \tan(\pi/4),$$

et donc

$$\arctan 2x_2 + \arctan 3x_2 \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}.$$

Il suffit donc de prouver que $\arctan 2x_2 + \arctan 3x_2$ est élément de $]\pi/4 - \pi, \pi/4 + \pi[$ pour être sûr que x_2 est solution de l'équation. Mais, $0 \leq 2x_2 \leq 1$ et $0 \leq 3x_2 \leq 1$ et donc

$$0 \leq \arctan(2x_2) + \arctan(3x_2) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$1/6$ est donc l'unique solution de l'équation initiale.

4. Remarquons que puisqu'on calcule $\arcsin x$, on se limite à $x \in [-1, 1]$. Il est donc légitime de poser $x = \sin \theta$ avec $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. L'équation devient

$$\theta + \arcsin(\cos \theta) = \frac{\pi}{2}$$

qui est encore équivalente à

$$\arcsin(\sin(\pi/2 - \theta)) = \pi/2 - \theta.$$

Or, $\arcsin(\sin t) = t$ si et seulement si $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. On a donc $\arcsin(\sin(\pi/2 - \theta)) = \pi/2 - \theta$ si et seulement si $\pi/2 - \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta \in [0, \pi]$. Puisque $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, on obtient donc que l'ensemble des solutions est constitué des réels x s'écrivant $\sin(\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est $[0, 1]$.

5. Puisque $2 > 1$ et $3 > 1$, on a $\arctan 2 > \pi/4$ et $\arctan 3 > \pi/4$, d'où l'on déduit que $\arctan 2 + \arctan 3 > \pi/2$. Puisque $\arcsin x$ est toujours un élément de $[-\pi/2, \pi/2]$, on en déduit que l'équation n'a pas de solutions.

Correction de l'exercice 44 ▲

Soit $y = \arctan(2) + \arctan(8)$. Puisque $\arctan(8) \geq \arctan(2) > \arctan(1) = \pi/4$, y est compris entre $\pi/2$ et π . Calculons $\tan y$:

$$\begin{aligned}\tan(y) &= \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arctan 8)}{1 - \tan(\arctan 2) \tan(\arctan 8)} \\ &= \frac{2 + 8}{1 - 16} \\ &= \frac{-2}{3}.\end{aligned}$$

On a donc $y - \pi \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(y - \pi) = \tan(y) = -2/3$. Par définition de la fonction \arctan , on a donc : $y - \pi = \arctan(-2/3)$ (c'est ici que se trouve le piège de l'exercice ! il faut faire attention au fait que \arctan est une bijection à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$). On a donc :

$$\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \pi + \arctan(-2/3) + \arctan(5).$$

On réitère le procédé : si $z = \arctan(-2/3) + \arctan(5)$, alors $z \in]-\pi/2, \pi/2[$, et on a :

$$\tan(z) = 1.$$

Ceci prouve que $z = \pi/4$, et en particulier que la somme demandée fait $5\pi/4$.

Correction de l'exercice 45 ▲

1. On a $0 \leq \arctan p \leq \arctan(p+1)$ et $\arctan(p+1) < \pi/2$. On en déduit que $\arctan(p+1) - \arctan p \in [0, \pi/2[$. De même, puisque $\frac{1}{p^2+p+1} \geq 0$, on a $\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) \in [0, \pi/2[$. Pour prouver que ces deux nombres sont égaux, il suffit donc de prouver qu'ils ont la même tangente. Mais on a

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right) = \frac{1}{p^2+p+1}$$

et

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(p+1) - \arctan p) &= \frac{\tan(\arctan(p+1)) - \tan(\arctan p)}{1 + \tan(\arctan(p+1))\tan(\arctan p)} \\ &= \frac{p+1 - p}{1 + (p+1)p} = \frac{1}{p^2+p+1}.\end{aligned}$$

On en déduit le résultat voulu.

2. Utilisant le résultat de la question précédente, on trouve une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{p=0}^n (\arctan(p+1) - \arctan p) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1).$$

On en déduit donc que (S_n) tend vers $\pi/2$.

Correction de l'exercice 46 ▲

1. Posons $f(x) = \arctan x + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$. Cette fonction est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Sa dérivée vérifie

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + 2 \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + (\sqrt{1+x^2} - x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2 - x\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} - x} \\ &= 0.\end{aligned}$$

La fonction f est donc constante. De plus, $f(0) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ ce qui achève de prouver que f est identiquement égale à $\frac{\pi}{2}$.

2. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, introduisons la fonction

$$f_y(x) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \arctan x - \arctan y.$$

f_y est définie et dérivable sur $] -\infty, 1/y[\cup] 1/y, +\infty[$. De plus, on a

$$\begin{aligned} f'_y(x) &= \frac{\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}}{\frac{(1-xy)^2 + (x+y)^2}{(1-xy)^2}} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f_y est constante sur chacun des intervalles $] -\infty, 1/y[$ et $] 1/y, +\infty[$ -ATTENTION ! La fonction n'est pas forcément constante sur \mathbb{R} . On distingue alors suivant le signe de y .

Si $y > 0$, pour $x < 1/y$, on a $f_y(x) = f_y(0) = 0$. De plus, pour $x > 1/y$, on a

$$\begin{aligned} f_y(x) &= \lim_{+\infty} f_y = \arctan\left(\frac{-1}{y}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan(y) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \left(\arctan y + \arctan \frac{1}{y}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi. \end{aligned}$$

Si $y < 0$, un raisonnement similaire montre que $f_y(x) = \pi$ pour tout $x < 1/y$ et $f_y(x) = 0$ pour tout $x > 1/y$. Enfin, si $y = 0$, on a clairement $f_0(x) = 0$.

3. Si $y > 0$, pour $x < 1/y$, on a $f_y(x) = f_y(0) = 0$. De plus, pour $x > 1/y$, on a

$$\begin{aligned} f_y(x) &= \lim_{+\infty} f_y = \arctan\left(\frac{-1}{y}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan(y) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \left(\arctan y + \arctan \frac{1}{y}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi. \end{aligned}$$

4. Si $y < 0$, un raisonnement similaire montre que $f_y(x) = \pi$ pour tout $x < 1/y$ et $f_y(x) = 0$ pour tout $x > 1/y$.

5. Enfin, si $y = 0$, on a clairement $f_0(x) = 0$.
